M 7.3.1 Umformen von Termen

In Jahrgangsstufe 7 wird das Fundament einer Schritt für Schritt aufzubauenden Algebra gelegt. Dem Umformen von Termen kommt dabei eine grundlegende Bedeutung zu. Im Lehrplan heißt es „Die Schüler lernen, auf der Grundlage der Rechengesetze für rationale Zahlen Terme **angemessener Komplexität** in äquivalente Terme umzuwandeln." Hier ist der deutliche Hinweis enthalten, dass monotones, rein schematisches Üben, bei dem der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nur über die Komplexität der Terme gesteuert wird, nicht im Vordergrund stehen soll. Keinesfalls ist daran gedacht, den Schwerpunkt des Unterrichts auf das „schablonenhafte" Berechnen derart komplexer Terme wie

$$[x^2\cdot(-y)-x\cdot(-y^2)](y+x)+\left(\frac{-8}{-2}\right)\cdot(-y)^3\cdot\frac{x}{2^3}-(-x^3)\cdot(y-2x)$$

oder

$$(x^2-y^2)\left(x-\frac{2x-4y}{2}\right)^2-4x^2\cdot\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(y+\frac{x}{2}\right)$$

zu legen. Vielmehr soll intensives, variantenreiches Üben, das auch den konstruktiven Umgang mit Schülerfehlern einbezieht, zu einem für die Jahrgangsstufe adäquaten Maß an Rechenfertigkeit führen.

Die binomischen Formeln sind kein Lerninhalt in Jahrgangsstufe 7, sie werden gemäß Lehrplan erst im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen in Jahrgangsstufe 9 eingeführt. Allenfalls können sie in den Jahrgangsstufen 7 oder 8 als Spezialfall des Ausmultiplizierens von Summen anklingen; eine systematische Thematisierung ist jedoch noch nicht beabsichtigt.

Auf die Potenzgesetze wird in Jahrgangsstufe 8 näher eingegangen; in Jahrgangsstufe 7 wird man – falls erforderlich – bei Termumformungen auf die Definition der Potenz zurückgreifen („Abzählen gleicher Faktoren").

Laut Lehrplan soll **in einfachen Fällen auch faktorisiert** werden. Es ist nur daran gedacht, das Distributivgesetz in elementarer Form anzuwenden. Die Einbeziehung der binomischen Formeln schließt sich aus, da sie nicht im Lehrplan der Jahrgangsstufe 7 enthalten sind. Es genügt folglich, den größtmöglichen gemeinsamen Faktor bzw. einen vorgegebenen Faktor aus mehreren Summanden auszuklammern.

Link zu Beispielaufgaben:

- Zusammenfassen und Ausmultiplizieren von Termen
- Faktorisieren von Termen

Beispielaufgaben zum Zusammenfassen und Ausmultiplizieren von Termen

Die folgenden Aufgaben weisen hinsichtlich der angestrebten Rechenfertigkeit ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden.

1. Fasse jeweils zusammen

   a) $\left(-2ab^3\right)\cdot\left(1{,}5a^2b\right)$

      [Kommentar: Die Schüler sollten in der Lage sein, diese Termumformung lediglich durch Kopfrechnen durchzuführen.]

   b) $3x\left[5xy-\left(6yx-9y^2\right)\right]-2y\left(-2x^2\right)$

   c) $10{,}5a^3b^4c:(-3bc)-(-2)^2(2ab)^3$

   d) $(1{,}5u+v)(-2u+5v)$

   e) $(x-7)(x+4)-x(-2x-3)$

   f) $\left(-\frac{1}{2}a+3b\right)\left(1{,}25+\frac{3}{4}\right)\cdot 3a-2a\left(b-1\frac{1}{2}b\right)$

   g) $\left(0{,}3x-x+\frac{7}{10}x\right)(x+4)\left(x^2-3x+1\right)-2\left(x^2-1\right)$

      [*Kommentar zu den Teilaufgaben f und g: Das unreflektierte Ausmultiplizieren von Summen führt bei diesen Aufgaben zu erheblichem Mehraufwand.]*

   h) $(0{,}5x-1)\left(-y+\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}(x-2)x$

   i) $2\left(\frac{1}{2}a\cdot 3b\right)+3b\left[0{,}25b-(-2a)\right]$

      [Kommentar: Hier kann auf die falsche Anwendung des Distributivgesetzes $\cancel{2\left(\frac{1}{2}a\cdot 3b\right)=a\cdot 6b}$ *eingegangen werden.]*

2. Welcher der folgenden Terme ist zum Term $x^2-(3-x)^2$ äquivalent? Kreuze an.

   ☐ -9 ☐ $6x-9$ ☐ $-6x-9$ ☐ $2x^2-9$ ☐ $2x^2-6x-9$ ☐ $-9+6x$

   [Kommentar: Die binomischen Formeln sind an dieser Stelle nicht notwendig; das Quadrat stellt lediglich einen Spezialfall beim Ausmultiplizieren von Summen dar.]

3. Überlege, aus wie vielen Summanden die Summe besteht, die man nach dem Ausmultiplizieren des Terms $\left(a^2+a+1\right)\left(b^2-b^5+b^{11}-1\right)\left(c^3-1\right)$ erhält. Kreuze an.

   ☐ 12 ☐ 9 ☐ 8 ☐ 24 ☐ 10

4. Nenne die Fehler, die beim Ausmultiplizieren passiert sind.

   $(-3x+2)(2x-3)-x^2(7x^3-y)=-6x^2+6-7x^6-x^2y$

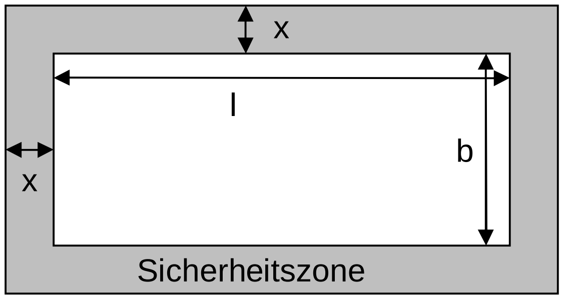
   [*Kommentar: Bei dieser Aufgabe werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ gefordert. Ihr Stellenwert ist momentan im Vergleich zur Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ noch nachrangig. Im Sinne einer umfassenden mathematischen Bildung sollten jedoch alle in den KMK-Bildungsstandards genannten Kompetenzen gleichermaßen Eingang in den Unterricht finden.]*

5. Der Spielfeldrand eines Fußballfeldes der Breite b und Länge l soll von den Zuschauern den Abstand x haben. Christian, Monika und Peter schreiben Terme auf, die den Flächeninhalt der Sicherheitszone beschreiben:

   Christian: $2 \cdot (l + x) \cdot x + 2 \cdot (b + x) \cdot x$

   Monika: $(2x + l) \cdot (2x + b) - l \cdot b$

   Peter: $x \cdot (l + x + x) \cdot 2 + x \cdot b \cdot 2$



   a) Beschreibe – gegebenenfalls mit Hilfe einer Skizze – wie die drei jeweils ihren Term gefunden haben könnten.
   b) Zeige, dass die Terme äquivalent sind.
   c) Klaus stellt den Term $2 \cdot l \cdot x + 2 \cdot b \cdot x$ auf und behauptet, dass dieser auch den Flächeninhalt der Sicherheitszone beschreibt. Was meinst du dazu?
   d) In der Münchner Allianz-Arena ist das Spielfeld 105 m lang und 68 m breit. Der Sicherheitsabstand beträgt 7,5 m. Welchen Flächeninhalt hat die Sicherheitszone?

6. Welche der folgenden Terme sind äquivalent?

   a) $2x^2 : x - 3 \cdot (x + x) - x \cdot \frac{1}{2}x$

   b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x$

   c) $-0{,}5x \cdot x - 2x \cdot (-2)$

   d) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x(8 + x) - 0{,}25x^2$

   e) $-2x\left(2 - \frac{1}{4}x\right) + 0{,}5x - x : 2$

Beispielaufgaben zum Faktorisieren von Termen

Die Aufgaben 1 bis 4 weisen ein Niveau auf, das erreicht und gehalten werden soll – die binomischen Formeln sind nicht im Lehrplan der Jahrgangsstufe 7 enthalten. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden.

1. Schreibe jeweils als Produkt:

   a) $a^2 - a + ab$

   b) $6uv - 24uv^2$

   c) $14rs^2 - 7r^2s + 35r^2s^2t$

   d) $24p^3q - 16pq^2$

   e) $4x^2y + 2xy - 4xy^2$

   f) Klammere jeweils (–1) aus: $a + b$, $b - a$, $-a - b - 1$, $a - b - 1$

   g) Klammere $-ab^2$ aus: $-ab^4 + a^2b^3 - a^3b^2$

   h) Klammere $-2ab$ aus: $2ab^2 - 4a^2b$

   i) Klammere $\frac{1}{2}x^2y$ aus: $\frac{1}{2}x^4y - \frac{5}{2}x^3y - x^2y^3$

2. Der Term $-\frac{1}{2}a^2 - a + 2ab$ soll als Produkt geschrieben werden. Kreuze jeweils an, ob richtig oder falsch faktorisiert wurde:

	richtig	falsch
a) $-\frac{1}{2}a(a + 2 - 4b)$	□	□
b) $a(-\frac{1}{2}a + 2b)$	□	□
c) $2(-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2} + b) \cdot a$	□	□
d) $a(a - 2b) \cdot (-\frac{1}{2})$	□	□
e) $0{,}5a(-a - \frac{1}{2} + ab)$	□	□

3. Beschreibe mit Worten, welche Fehler jeweils gemacht wurden.

   a) $\frac{1}{2}ab^2 \cdot 2a^2b = ab \cdot (\frac{1}{2}b \cdot 2a)$

   b) $-\frac{1}{2}xy^2 - xy + 2x^2y = -xy(\frac{1}{2}y + 2x)$

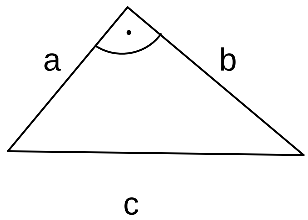
4. Wofür stehen jeweils die Platzhalter Δ bzw. O ?

   a) $\frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{2}z \cdot z + 2(z+z) = \frac{1}{4}z(z^2 - \Delta z + O)$

   b) $2x^2y \cdot 4xy^2 = 2xy \cdot (\ O\ )$

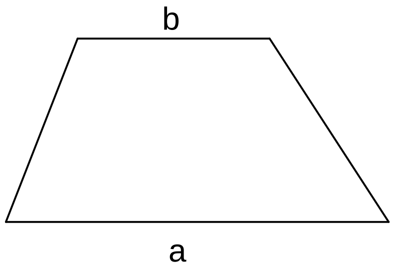
5. a) Das abgebildete Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 + a$.

   Was lässt sich daraus über die Länge der Seite b aussagen?
   (Tipp: Schreibe die Summe als Produkt.)



   b) Das abgebildete Trapez hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2$.

   Was lässt sich daraus über seine Höhe aussagen?
   (Tipp: Schreibe die Summe als Produkt.)



[Kommentar: Im Sinne systematischen Wiederholens bietet es sich vor Bearbeitung dieser Aufgabe an, kurz auf die Herleitung der Flächenformel für das Trapez einzugehen.]